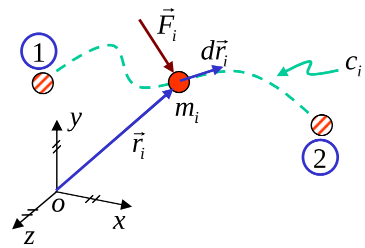
I. Leyes de Newton
II. Cinemática
III. Dinámica
Sist. de partículas
Definiciones
1ra ley
2da ley
3ra ley
Cuerpo rígido
Ecs. de Lagrange

3ra Ley de la mecánica: Definiciones



Trabajo realizado por la fuerza F ***para llevar una partícula i desde el punto 1 al punto 2 por el camino c_i***

$$W^F_{1\to 2} = \int_{\substack{r_1 \\ c_i}}^{r_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}_i$$

El trabajo depende del camino!!

Un campo de fuerzas es conservativo si su rotacional es nulo

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}^c = \vec{0}$$

Operador diferencial Nabla

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

Si un campo de fuerzas es conservativo entonces se puede expresar como el gradiente de una función escalar U llamada Energía Potencial

$$\vec{F}^c = -\vec{\nabla}U = \tfrac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \tfrac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \tfrac{\partial U}{\partial z}\hat{k}$$

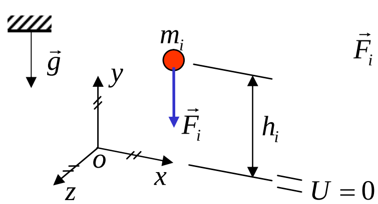
El trabajo de un campo de fuerza conservativo se puede calcular como un cambio de Energía Potencial y es independiente del camino que se tome

$$W^{F^c}_{1\to 2} = \int_{\substack{r_1 \\ c_i}}^{r_2} \vec{F}^c\cdot d\vec{r}_i = \int_{\substack{r_1 \\ c_i}}^{r_2} -\vec{\nabla}U\cdot d\vec{r}_i = \int_{U_1}^{U_2} -dU = U_1 - U_2$$

$$W^{F^c}_{1\to 1} = \oint_1 \vec{F}^c\cdot d\vec{r}_i = U_1 - U_1 = 0$$

I. Leyes de Newton
II. Cinemática
III. Dinámica
Sist. de partículas
Definiciones
1ra ley
2da ley
3ra ley
Cuerpo rígido
Ecs. de Lagrange

3ra Ley : Energía potencial gravitatoria



$$\vec{F}_i = -m_i g\,\hat{j}$$

El campo gravitatorio es un campo de fuerzas conservativo ?

$\vec{F}_i$ ***es conservativo*** $\Leftrightarrow$ $\vec{\nabla}\times\vec{F}_i = \vec{0}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\times -m_i g\,\hat{j} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial m_i g}{\partial z} \\ 0 \\ -\frac{\partial m_i g}{\partial x} \end{Bmatrix} = \vec{0}$$

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}U \quad\Rightarrow\quad \vec{F}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_i g \\ 0 \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad\Rightarrow\quad U = U_{(y)}$$

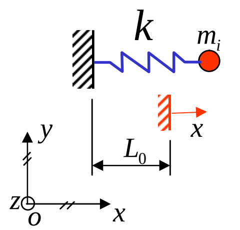
$$dU = m_i g\,dy \quad\Rightarrow\quad \int dU = \int m_i g\,dy \quad\Rightarrow\quad U_{(y)} = m_i g\;y + cte$$

La energía potencial gravitatoria de una partícula en una posición dada se calcula como su peso por la distancia de la partícula a un nivel de referencia preestablecido. A mayor altura respecto al nivel, mayor energía potencial

$$U = m_i g\;h_i + cte$$

I. Leyes de Newton
II. Cinemática
III. Dinámica
Sist. de partículas
Definiciones
1ra ley
2da ley
3ra ley
Cuerpo rígido
Ecs. de Lagrange

3ra Ley : Energía potencial elástica de un resorte



$$\vec{F}_i = -k\,x\,\hat{i}$$

x **Deflexión del resorte**

k **Constante de rigidez del resorte**

L_0 **Longitud indeformada del resorte**

El campo elástico lineal es un campo de fuerzas conservativo ? SI.

$\vec{F}_i$ *es conservativo* $\Leftrightarrow$ $\vec{\nabla}\times\vec{F}_i = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\times -k\,x\,\hat{i} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{\partial kx}{\partial z} \\ \frac{\partial kx}{\partial y} \end{Bmatrix} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}U$ $\Rightarrow$ $\vec{F}_i = \begin{Bmatrix} -k\,x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{Bmatrix}$ $\Rightarrow$ $U = U_{(x)}$

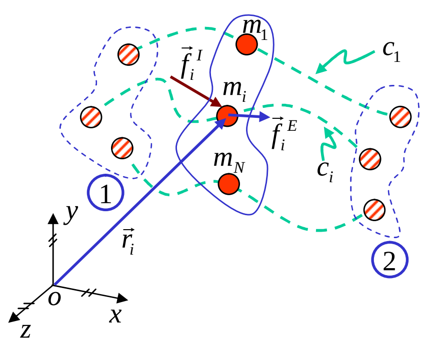
$\Rightarrow$ $dU = k\,x\,dy$ $\Rightarrow$ $\int dU = \int k\,x\,dy$ $\Rightarrow$ $U_{(x)} = \frac{1}{2}k\,x^2 + cte$

La energía potencial elástica de un resorte **se calcula como un medio de la constante de rigidez del resorte por el cuadrado de la deflexión respecto a la posición indeformada.**

$\Rightarrow$ $U = \frac{1}{2}k\,x_i^2 + cte$

I. Leyes de Newton
II. Cinemática
III. Dinámica
Sist. de partículas
Definiciones
1ra ley
2da ley
3ra ley
Cuerpo rígido
Ecs. de Lagrange

3ra Ley de la mecánica: Deducción



2da ley de Newton para la partícula i

$\Rightarrow$ $\vec{f}_i^{\,E} + \vec{f}_i^{\,I} = m_i\vec{a}_i$

Trabajo sobre la partícula i

$\Rightarrow$ $\int_{c_i\,r_1}^{r_2} \vec{f}_i^{\,E}\cdot d\vec{r}_i + \int_{c_i\,r_1}^{r_2} \vec{f}_i^{\,I}\cdot d\vec{r}_i = \int_{c_i\,r_1}^{r_2} m_i\vec{a}_i\cdot d\vec{r}_i$

Trabajo sobre las N partículas $\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^{N}\int_{c_i\,r_1}^{r_2} \vec{f}_i^{\,E}\cdot d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{N}\int_{c_i\,r_1}^{r_2} \vec{f}_i^{\,I}\cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N}\int_{c_i\,r_1}^{r_2} m_i\vec{a}_i\cdot d\vec{r}_i$

Trabajo de las fuerzas externas al sistema

$$W_{1\to 2}^{E} = \sum_{i=1}^{N}\int_{c_i\,r_1}^{r_2} \vec{f}_i^{\,E}\cdot d\vec{r}_i$$

Trabajo de las fuerzas internas del sistema

$$W_{1\to 2}^{I} = \sum_{i=1}^{N}\int_{c_i\,r_1}^{r_2} \vec{f}_i^{\,I}\cdot d\vec{r}_i$$

$\Rightarrow$ $W_{1\to 2}^{E} + W_{1\to 2}^{I} = \sum_{i=1}^{N}\int_{c_i\,r_1}^{r_2} m_i\vec{a}_i\cdot d\vec{r}_i$

Energía cinética de la partícula i $T_i = \frac{1}{2}m_i\vec{v}_i\cdot\vec{v}_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2$

I. Leyes de Newton
II. Cinemática
III. Dinámica
Sist. de partículas
Definiciones
1ra ley
2da ley
3ra ley
Cuerpo rígido
Ecs. de Lagrange

3ra Ley de la mecánica: Deducción

Energía cinética de la partícula i $T_i = \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$

$$\Rightarrow \frac{dT_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i\right) = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i$$

$$\Rightarrow dT_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} dt = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot d\vec{r}_i = m_i \vec{a}_i \cdot d\vec{r}_i$$

$$\Rightarrow W_{1\to 2}^{E} + W_{1\to 2}^{I} = \sum_{i=1}^{N} \int_{C_i\, r_1}^{r_2} m_i \vec{a}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \int_{T_{i1}}^{T_{i2}} dT_i = \sum_{i=1}^{N} \left(T_{i2} - T_{i1}\right) = T_2 - T_1$$

$$\Rightarrow W_{1\to 2}^{E} + W_{1\to 2}^{I} = T_2 - T_1$$

El trabajo de la fuerzas externas e internas puede ser descompuesto en trabajo de fuerzas conservativas y trabajo de fuerzas no conservativas o que no se conozca su potencial

$$\Rightarrow \begin{aligned} W_{1\to 2}^{E} &= W_{1\to 2}^{E(NC)} + W_{1\to 2}^{E(C)} \\ W_{1\to 2}^{I} &= W_{1\to 2}^{I(NC)} + W_{1\to 2}^{I(C)} \\ W_{1\to 2}^{E(C)} + W_{1\to 2}^{I(C)} &= U_1 - U_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow W_{1\to 2}^{E(NC)} + W_{1\to 2}^{I(NC)} = \left(T_2 + U_2\right) - \left(T_1 + U_1\right)$$

El trabajo de las fuerzas no conservativas que actúan sobre el sistema para ir de 1 a 2 es igual al cambio de la energía mecánica que experimenta el mismo!